Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Estrutura de classes

Suponha que $(X_n) \sim \mathrm{CM}(\cdot, \mathbf{P})$ no espaço de estados $\mathcal{S}$.

Dados $x, y \in \mathcal{S}$, dizemos que x *alcança* y, *notação:* $x \to y$, se

$$\mathbb{P}_x(X_n = y \text{ para algum } n \geq 0) > 0.$$

E dizemos que x e y *se comunicam* (ou x *se comunica com* y), *notação:* $x \leftrightarrow y$, se $x \to y$ *e* $y \to x$.

Obs. Note que $x \to x$, e logo $x \leftrightarrow x$, $x \in \mathcal{S}$.

Teorema. Para $x, y \in \mathcal{S}$, $x \neq y$, são equivalentes:
(i) $x \to y$;
(ii) $\exists\ n \geq 1$ e $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{S}$, com $x_0 = x$ e $x_n = y$, tal que

$$P_{x_0 x_1} \cdots P_{x_{n-1} x_n} > 0;$$

(iii) $P_{xy}^{(n)} > 0$ para algum $n \geq 1$.

Estrutura de classes (cont.)

Dem. (i $\Rightarrow$ iii) Por subaditividade:

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}_x(X_n = y) \geq \mathbb{P}_x(\cup_{n\geq 1}\{X_n = y\}) \overset{(i)}{>} 0 \Rightarrow \text{(iii)}$$

(iii $\Rightarrow$ ii)

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_x(X_n = y) \\ &= \sum_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in\mathcal{S}} \mathbb{P}_x(X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = y) \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in\mathcal{S}} P_{xx_1}\cdots P_{x_{n-1}y} \overset{(iii)}{>} 0 \Rightarrow \text{(ii)} \end{aligned}$$

(ii $\Rightarrow$ i) De (ii) e $(*)$ segue que $\mathbb{P}_x(X_n = y) > 0$; logo

$$\mathbb{P}_x(\cup_{\ell\geq 1}\{X_\ell = y\}) \geq \mathbb{P}_x(X_n = y) > 0. \qquad \square$$

Estrutura de classes (cont.)

Proposição. $\leftrightarrow$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{S}$.

Dem. 1) $x \leftrightarrow x$, como já tínhamos observado. (*Reflexividade*)

2) Se $x \leftrightarrow y$ e $y \leftrightarrow z$, então $\exists\, m, n \geq 0$ tq $P^m_{xy} P^n_{yz} > 0$.

Logo,

$$P^{m+n}_{xz} \overset{\text{Chapman-Kolmogorov}}{=} \sum_{w \in \mathcal{S}} P^m_{xw} P^n_{wz} \geq P^m_{xy} P^n_{yz} > 0,$$

e, portanto, $x \to z$.

Similarmente, $z \to x$, e $x \leftrightarrow z$. (*Transitividade*)

3) É óbvio que $x \leftrightarrow y \Rightarrow y \leftrightarrow x$. (*Simetria*) $\square$

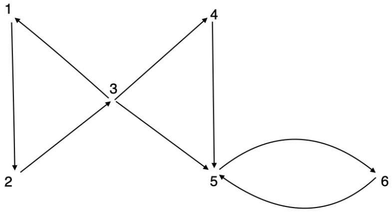
Logo, $\leftrightarrow$ particiona $\mathcal{S}$ em *classes de comunicação* — elementos de uma mesma classe se comunicam (entre si), mas não se comunicam com elementos de outras classes (entretanto, não se descarta que possam *alcançar* elementos de outras classes).

Diremos que uma classe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{S}$ é *fechada* se, dados $x \in \mathcal{C}$ e $y \in \mathcal{S}$, se $x \to y$, então $y \in \mathcal{C}$.

Exemplo

$$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



(No diagrama acima, pomos uma seta apontando de x a y se e só se $P_{xy} > 0$, $x \neq y$.)

Classes (de comunicação): $\{1, 2, 3\}$, $\{4\}$ e $\{5, 6\}$.

$\{5, 6\}$ é a única classe fechada.

Definições

Dizemos que $x \in \mathcal{S}$ é *absorvente* se $\{x\}$ for uma classe fechada ($\Leftrightarrow P_{xx} = 1$); exemplos: 0 no processo de ramificação; 0 e N na ruína do apostador.

Uma CM para a qual $\mathcal{S}$ é uma classe é dita *irredutível* ($\Leftrightarrow x \leftrightarrow y \ \forall x, y \in \mathcal{S}$).

Grafo de uma Cadeia de Markov

Muitas vezes, como fizemos no exemplo anterior, é conveniente considerar/desenhar o *grafo* de uma Cadeia de Markov, obtido a partir da matriz de transição $\mathbf{P}$.

Lembremos que um grafo é constituído de um conjunto de *vértices* (ou *sítios*) $\mathcal{V}$ e de um conjunto de *arestas* (ou *elos*) $\mathcal{A}$.

As arestas podem ser vistas como pares de vértices, e podem ser *orientadas* (quando a ordem do par importa) ou não (quando a ordem do par não importa).

No caso da CM$(\cdot, \mathbf{P})$ em $\mathcal{S}$, o conjunto de vértices é o espaço de estados $\mathcal{S}$ e o conjunto de arestas orientadas são os pares (x, y) tais que $x, y \in \mathcal{S}$ e $P_{xy} > 0$ — nesse caso, podemos pensar na aresta como *orientada (ou indo) de* x *a* y.

Obs. Uma análise do grafo da Cadeia de Markov é o suficiente para determinar-lhe a estrutura de classes. De outro modo, basta analisar que entradas de $\mathbf{P}$ são nulas e quais são não nulas — o particular valor não nulo da entrada não é relevante para determinar a estrutura de classes.

Tempo de chegada e Probabilidade de absorção

Seja $X \sim \mathrm{CM}(\cdot, \mathbf{P})$. Dado $A \subset \mathcal{S}$, o *tempo de chegada* de $\mathbf{X}$ em A é a v.a.

$$H^A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\} \qquad (\text{conv: } \inf \emptyset = \infty)$$

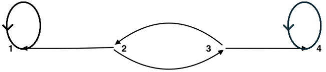
Seja $h_x^A = \mathbb{P}_x(H^A < \infty) = \mathbb{P}_x(\mathbf{X} \text{ atinge } A)$.

Quando A for uma classe fechada, diremos que h_x^A é a *probabilidade de absorção em A* (saindo de x).

Seja $k_x^A = \mathbb{E}_x(H^A) = \mathbb{E}_x(\text{tempo de chegada em } A)$.

Exemplo

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Sejam $h_x = \mathbb{P}_x($ atingir 4$)$ e $k_x = \mathbb{E}_x($ tempo de chegada em $\{1,4\})$. Temos:

$$h_1 = 0,\ h_4 = 1,\ k_1 = k_4 = 0, \text{ e}$$

$$\begin{cases} h_2 = \frac{1}{2}\, h_1 + \frac{1}{2}\, h_3 \\ h_3 = \frac{1}{2}\, h_2 + \frac{1}{2}\, h_4 \end{cases}, \qquad \begin{cases} k_2 = 1 + \frac{1}{2}\, k_1 + \frac{1}{2}\, k_3 \\ k_3 = 1 + \frac{1}{2}\, k_2 + \frac{1}{2}\, k_4 \end{cases}.$$

Segue que $h_2 = \frac{1}{3}$, $h_3 = \frac{2}{3}$; $k_2 = k_3 = 2$.

Teorema I

As probabilidades de chegada $h^A = (h_x^A) = (h_x^A,\, x \in \mathcal{S})$ são a solução *mínima* não negativa do sistema de eqs lineares

$$(*) \qquad f_x = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ \sum_{y \in \mathcal{S}} P_{xy}\, f_y, & x \notin A. \end{cases}$$

Obs. 1) $f_x \equiv 1$ é sempre slç de $(*)$;

2) se $h_x^A < 1$ p/algum $x \in \mathcal{S}$, então $(*)$ tem mais de uma slç nneg.

3) se $h_x^A \equiv 1$ e (f_x) *limitada* for uma slç nneg de $(*)$,

então $f_x \equiv h_x^A \equiv 1$.

Dem. Primeira/e, notemos que as probs de cheg satisfazem $(*)$ — basta condicionar em X_1 e observar que, por Markov,

$$\mathbb{P}_x(H^A < \infty | X_1 = y) = \mathbb{P}_y(H^A < \infty),\ x \notin A.$$

Suponha agora que (f_x) satisfaça $(*)$. Então, $f_x = h_x^A = 1$ para todo $x \in A$.

Dem. (cont)

Se $x \notin A$:

$$f_x = \sum_{y\in A} P_{xy} + \sum_{y\notin A} P_{xy} \overbrace{\sum_{z\in\mathcal{S}} P_{yz} f_z}^{f_y}$$

$$= \mathbb{P}_x(H^A = 1) + \underbrace{\sum_{y\notin A} P_{xy} \sum_{z\in A} P_{yz}}_{\mathbb{P}_x(H^A=2)} + \sum_{y,z\notin A} P_{xy} P_{yz} f_z$$

$$\vdots$$

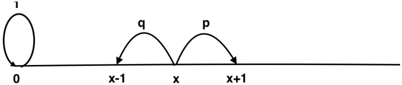
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_x(H^A = i) + \sum_{x_1,\ldots,x_n\notin A} P_{xx_1} \cdots P_{x_{n-1}x_n} \underbrace{f_{x_n}}_{\geq 0}$$

$$\geq \mathbb{P}_x(H^A \leq n), \ n \geq 1.$$

Logo, $f_x \geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_x(H^A \leq n) = \mathbb{P}_x(H^A < \infty)$. $\square$

Ruína do apostador

$\mathcal{S} = \mathbb{N}$; $P_{00} = 1$; $P_{x,x+1} = p = 1 - P_{x,x-1}$, $x \geq 1$, $p \in (0,1)$.



0 é absorvente. Seja $h_x = \mathbb{P}_x(\text{ atingir } 0)$, $x \in \mathbb{N}$.

Neste caso, $(*)$ toma a seguinte forma.

$h_0 = 1$; $h_x = p\, h_{x+1} + q\, h_{x-1}$, $q = 1 - p$.

Se $p \neq q$ ($p \neq 1/2$), a eq de diferença acima tem slç geral dada por

$$h_x = A + B\lambda^x \text{ para } A, B \text{ constantes, onde } \lambda = q/p.$$

1) Se $p < 1/2$ (*jogo desfavorável*), então $\lambda^x \to \infty$ qdo $x \to \infty$. Como $h_x \in [0,1]$, temos que $B = 0$, e então $A = h_0 = 1$. Logo, $h_x \equiv 1$ neste caso.

Ruína do apostador (cont.)

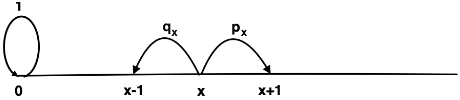
2) Se $p > 1/2$ (*jogo favorável*), então $\lambda^x \to 0$ qdo $x \to \infty$. Como $h_x \in [0,1]$, temos que $A \in [0,1]$. De $A + B = h_0 = 1$, segue que $B = 1 - A$ e $h_x = A + (1-A)\lambda^x = A(1-\lambda^x) + \lambda^x$.

Concluímos que a slç mínima corresponde a $A = 0$, e logo

$$h_x = \lambda^x = \left(\frac{q}{p}\right)^x, \ x \in \mathbb{N}.$$

3) Se $p = 1/2$ (*jogo justo*), então a slç geral de $(*)$ é $h_x = A + Bx$, e da limitação de h_x, temos novamente $B = 0$ e $A = 1$: $h_x \equiv 1$.

Obs. Veja o ex. da cadeia de nascimento e morte no livro.



Tempos de chegada esperados

Teorema II

Os tempos de chegada esperados $k^A = (k^A_x)$ são a solução *mínima* não negativa do sistema de eqs lineares

$$(**) \qquad g_x = \begin{cases} 0, & x \in A; \quad (i) \\ 1 + \sum_{\substack{y\in\mathcal{S} \\ (y\notin A)}} P_{xy}\, g_y, & x \notin A. \quad (ii) \end{cases}$$

Dem. Vamos primeiro verificar que k^A satisfaz $(**)$:

(i) é óbvio; se $x \notin A$, então

$$k^A_x = \mathbb{E}_x(H^A) = \sum_{y\in\mathcal{S}} \underbrace{\mathbb{E}_x(H^A|X_1 = y)}_{\text{Markov: } 1+\mathbb{E}_y(H^A)} P_{xy} = 1 + \sum_{y\in\mathcal{S}} P_{xy} k^A_y.$$

Se g_x satisfaz $(**)$, então, para $x \in A$, $g_x = k^A_x = 0$.

Dem. (cont)

Se $x \notin A$:

$$g_x = 1 + \sum_{y \notin A} P_{xy} \Big(\overbrace{1 + \sum_{z \notin A} P_{yz} g_z}^{g_y} \Big)$$

$$= 1 + \mathbb{P}_x(H^A \geq 2) + \underbrace{\sum_{y \notin A} P_{xy} \sum_{z \notin A} P_{yz}}_{\mathbb{P}_x(H^A \geq 3)} + \sum_{y,z,w \notin A} P_{xy} P_{yz} P_{zw} g_w$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_x(H^A \geq i) + \sum_{x_1,\dots,x_n \notin A} P_{xx_1} \cdots P_{x_{n-1}x_n} \underbrace{g_{x_n}}_{\geq 0}$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_x(H^A \geq i), \ n \geq 1.$$

Logo, $g_x \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(H^A \geq i) = \mathbb{E}_x(H^A)$. $\square$

Ruína do apostador

$p \leq 1/2$; $k_x = \mathbb{E}_x(H^{\{0\}})$, $x \geq 0$;

$$(**) \qquad k_0 = 0,\ k_x = 1 + q\,k_{x-1} + p\,k_{x+1},\ x \geq 1.$$

Se $k_1 < \infty$, então, indutivamente a partir de $(**)$: $k_x < \infty$, $x \geq 2$.

1) Se $p = 1/2$, supondo $k_1 < \infty$, fazendo $\Delta_x = k_x - k_{x-1}$, temos de $(**)$: $\Delta_x = 2 + \Delta_{x+1}$; iterando,

$$\Delta_x = \Delta_1 - 2(x-1) = k_1 - 2(x-1),\ x \geq 1. \qquad (***)$$

Note, no entanto, que Δ_x tem que ser ≥ 0 para todo $x \geq 1$. Tomando x bastante grande, temos então uma contradição, o que nos leva à conclusão de que $k_1 = \infty$, e logo $k_x = \infty\ \forall x \geq 1$.

(Alternativa/e: de $(***)$, temos que

$$k_x = \sum_{y=1}^{x} \Delta_y = k_1 x - (x-1)x = x(k_1 - x + 1),$$

que se torna < 0 para x grande, o que é absurdo, e concluímos que $k_x = \infty\ \forall x \geq 1$.)

Ruína do apostador (cont.)

2) $p < 1/2$. Supondo $k_1 < \infty$: $\Delta_{x+1} = \lambda\Delta_x - \frac{1}{p}$, $x \geq 1$ $(\star)$

Slç geral de $(\star)$: $\Delta_x = A\lambda^x + B$, $x \geq 1$; subst em $(\star)$:

$$B = \frac{1}{q-p} = \frac{1}{1-2p}$$

Como $\Delta_x \geq 0$, temos que $A \geq 0$, e logo a slç mínima positiva de $(**)$ corresponde a $A = 0$:

$$k_x = Bx = \frac{x}{1-2p}$$

Propriedade Forte de Markov

Propriedade de Markov de dada (X_n): $\forall\, \ell \geq 1$, $n \geq 0$ fixos

$$\mathbb{P}(X_{n+\ell} = \cdot | X_k,\, 0 \leq k \leq n) = \mathbb{P}(X_{n+\ell} = \cdot | X_n) = \mathbb{P}_{X_n}(X_\ell = \cdot),$$

onde $\mathbb{P}_{X_n}(X_\ell = \cdot) = \mathbb{P}_x(X_\ell = \cdot)|_{x=X_n}$.

Extensão para tempos T aleatórios (va's inteiras não negativas no mesmo espaço de probabilidades que (X_n)):

$$\mathbb{P}(X_{T+\ell} = \cdot | X_k,\, 0 \leq k \leq T) = \mathbb{P}_{X_T}(X_\ell = \cdot) \qquad (\dagger)$$

Não pode ser válido em geral; exemplo: $\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array},$

$T = \sup\{n \geq 0 : X_n = 1\}$ (convenção: $\sup \emptyset = 0$)

... tempo da última visita a 1. (**Obs.** $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$)

Supondo $\mu_1 = \mathbb{P}(X_0 = 1) = 1$, como $X_T = 1$ (qc):

$$\mathbb{P}(X_{T+1} = 1 | X_k,\, 0 \leq k \leq T) = 0 \neq 1/2 = P_{11}.$$

Precisamos de condições sobre T para a validade de $(\dagger)$.

Tempos de parada

Dado um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ onde haja uma sequência $\mathbf{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variáveis aleatórias, e uma variável aleatória $T \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dizemos que T é um *tempo de parada* (TP) para $\mathbf{X}$, se para cada $n \in \mathbb{N}$

o evento $\{T = n\}$ *não depender de* $\{X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots\}^*$.

Exemplos. (Suponhamos que para todo $n \geq 0, X_n \in \mathcal{S}$ enumerável)

1) *Tempo de* 1^a *passagem*: dado $x \in \mathcal{S}$, seja

$$T_x = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}.$$

Então $\{T_x = 1\} = \{X_1 = x\}$, e para $n \geq 2$

$$\{T_x = n\} = \{X_1 \neq x, \ldots, X_{n-1} \neq x, X_n = x\};$$

logo, T_x é um TP.

Obs. Sob $\mathbb{P}_x$, também chamamos T_x de *tempo de retorno* a x.

*Pode depender de $\{X_0, \ldots, X_n\}$.

Tempos de parada (exs.)

2) Dado $A \subset \mathcal{S}$,

$H^A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$: *tempo de chegada* em A.

Então $\{H^A = 0\} = \{X_0 \in A\}$, e para $n \geq 1$

$$\{H^A = n\} = \{X_0 \notin A, \dots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\};$$

logo, H^A é um TP.

3) *Tempo de última visita*: $L^A = \sup\{n \geq 0 : X_n \in A\}$

Não é em geral um TP: $\{L^A = n\}$ depende de $\{X_{n+k},\ k \geq 0\}$.

No exemplo de slide 2 acima: $T = L^{\{1\}}$. (Mas considere o exemplo

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$$

4) Tempos determinísticos são TP's.

Teorema 1 (Propriedade Forte de Markov — PFM)

Seja (X_n) uma CM e T um TP. Então $\forall x; y_1, \ldots, y_n; x_0, x_1, \ldots \in \mathcal{S}$

$$\mathbb{P}(X_{T+1} = y_1, \ldots, X_{T+n} = y_n | T < \infty, X_0 = x_0, \ldots, X_{T-1} = x_{T-1}, X_T = x)$$
$$= \mathbb{P}_x(X_1 = y_1, \ldots, X_n = y_n), \; n \geq 1.$$

Obs. O Teorema 1 diz que se $T < \infty$, então, dado que $X_T = x$,

i) $(X_{T+1}, \ldots, X_{T+n})$ é independente de $(X_0, \ldots, X_{T-1})$, e

ii) tem a mesma distribuição que $(X_1, \ldots, X_n)$ sob $\mathbb{P}_x$.

Dem. do Teorema 1

Para $n \geq 0$. fixo, sejam os eventos

$$A = \{T < \infty, X_0 = x_0, \ldots, X_{T-1} = x_{T-1}, X_T = x\},$$
$$B = \{X_{T+1} = y_1, \ldots, X_{T+n} = y_n\}, \text{ e}$$
$$C = \{X_1 = y_1, \ldots, X_n = y_n\}.$$

Queremos mostrar que $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B \cap A)/\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_x(C)$. $\qquad (*)$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(B \cap A) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{P}(\overbrace{T = \ell, X_0 = x_0, \ldots, X_{\ell-1} = x_{\ell-1}}^{D_\ell}, X_\ell = x, \ldots, X_{\ell+n} = y_n) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{\ell+1} = y_1, \ldots, X_{\ell+n} = y_n | X_\ell = x, D_\ell)\, \mathbb{P}(X_\ell = x, D_\ell)
\end{aligned}$$

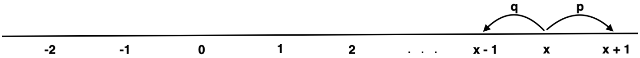
Dado $X_\ell = x$, D_ℓ só depende de $\{X_0, \ldots, X_{\ell-1}\}$; da propriedade de Markov (incluindo a homogeneidade temporal):

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}_x(X_1 = y_1, \ldots, X_n = y_n) \textstyle\sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_\ell = x, D_\ell) = \mathbb{P}_x(C)\mathbb{P}(A).$$

Substituindo em $(*)$, segue o resultado. $\square$

Exemplo — Passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}$

$$q = 1 - p \in (0, 1)$$



H_x = tempo de chegada em $x = H^{\{x\}}$, $x \in \mathbb{Z}$.†

Dado que $X_0 = 2$ e $H_1 < \infty$, temos que $H_0 = H_1 + \tilde{H}_0$, onde

$$\tilde{H}_0 = \inf\{n \geq 0 : X_{H_1+n} = 0\}.^\ddagger$$

Pela PFM, temos que, sob $\mathbb{P}_2(\cdot | H_1 < \infty)$, $\tilde{H}_0$ é independente de H_1 e tem a mesma distribuição que H_0 sob $\mathbb{P}_1$.

Obs. Temos ainda que H_1 sob $\mathbb{P}_2$ tem a mesma distribuição que H_0 sob $\mathbb{P}_1$, pela homogeneidade *espacial* do PAS§.

†usando a notação do Exemplo 2 acima

$^\ddagger H_1 = \infty \Rightarrow H_0 = \infty$

$^\S P(x, y) = P(0, y - x) \; \forall \; x, y$

PAS em $\mathbb{Z}$ (cont.)

Logo, para $0 \leq s < 1$, temos (lembrando que, nesse caso, $s^\infty = 0$)

$$\mathbb{E}_2(s^{H_0}) = \mathbb{E}_2(s^{H_0}, H_1 < \infty) = \mathbb{E}_2(s^{H_1+\tilde{H}_0} | H_1 < \infty)\, \mathbb{P}_2(H_1 < \infty)$$

$$= \mathbb{E}_2(s^{H_1} | H_1 < \infty) \times \underbrace{\mathbb{E}_2(s^{\tilde{H}_0} | H_1 < \infty)}_{\mathbb{E}_2(s^{\tilde{H}_0} | H_1 < \infty, X_{H_1} = 1) \overset{\text{PFM}}{=} \mathbb{E}_1(s^{H_0})} \times \mathbb{P}_2(H_1 < \infty)$$

$$= \mathbb{E}_2(s^{H_1}, H_1 < \infty)\, \mathbb{E}_1(s^{H_0}) \overset{**}{=} \mathbb{E}_1(s^{H_0})\, \mathbb{E}_1(s^{H_0}) =: \phi^2(s),$$

onde $\overset{**}{=}$ segue da observação ao final do slide anterior.

Por outro lado, pela Propriedade de Markov simples

$$\phi(s) = \mathbb{E}_1(s^{H_0}) = p\, \mathbb{E}_2(s^{H_0+1}) + q\, \mathbb{E}_0(s^{H_0+1}) = ps\, \phi^2(s) + qs. \qquad (\star)$$

Logo, para cada $s \in [0, 1)$, $\phi(s)$ satisfaz a equação $ps\, x^2 - x + qs = 0$, cujas raízes são $\dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2ps}$. Como ϕ é contínua em $[0, 1)$ e $\phi(0) = 0$:

$$\phi(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2ps} \qquad (*)$$

PAS em $\mathbb{Z}$ (cont.)

$$1)\ \mathbb{P}_1(H_0 < \infty) = \lim_{s \nearrow 1} \phi(s) \stackrel{(*)}{=} \frac{1 - \sqrt{1 - 4pq}}{2p} = \begin{cases} 1, & p \le q; \\ \frac{q}{p}, & p > q. \end{cases} \tag{1}$$

2) Expansão de Taylor de $(*)$ em torno de 0. Para $k \ge 1$:

$$\frac{d^k}{dt^k}(\overbrace{1 - \sqrt{1 - t}}^{f(t)}) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2k-1} \frac{1}{2^k} (1 - t)^{-\frac{2k-1}{2}} \stackrel{t=0}{=} \frac{1}{2k-1} \left\{ \frac{(2k)!}{2 \cdot 4 \cdots 2k} \right\} \frac{1}{2^k}$$

$$= \frac{1}{2k-1} \left\{ \frac{(2k)!}{k!} \frac{1}{2^k} \right\} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2k-1} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \frac{1}{4^k} k! = \underbrace{\frac{1}{2k-1} \binom{2k}{k} \frac{1}{4^k}}_{a_k} k!$$

Expansão de Taylor de f em torno de 0: $f(t) = \sum_{k \ge 1} a_k t^k$. Logo

$$\phi(s) = \frac{1}{2ps} f(4pqs^2) = \sum_{k \ge 1} \frac{1}{2(2k-1)} \binom{2k}{k} \cancel{\frac{1}{4^k}} \cancel{4^k} p^{k-1} q^k s^{2k-1} = \sum_{j \ge 0} p_j\, s^j,$$

$$\text{onde } p_j = \begin{cases} 0, & \text{se } j \text{ for par}, \\ \frac{1}{2j} \binom{j+1}{\frac{j+1}{2}} p^{\frac{j-1}{2}} q^{\frac{j+1}{2}}, & \text{se } j \text{ for ímpar}. \end{cases} \tag{2}$$

PAS em $\mathbb{Z}$ (cont.)

Identificando: de (2) e $\phi(s) = \sum_{j\geq 0} \mathbb{P}_1(H_0 = j)\, s^j$, segue que

$$\mathbb{P}_1(H_0 = j) = p_j,\ j \geq 0.$$

Valor esperado

$\mathbb{E}_1(H_0, H_0 < \infty) = \lim_{s \nearrow 1} \phi'(s)$

Em vez de partir de $(*)$, vamos diferenciar $(\star)$ em $(0,1)$:

$$\phi' = p\phi^2 + \underbrace{2ps\phi}_{<1 \text{ em } [0,1)}\phi' + q \Rightarrow \phi' = \frac{p\phi^2+q}{1-2p\phi s} \xrightarrow[s\uparrow 1]{(1)} \begin{cases} \frac{p+q}{1-2p} = \frac{1}{1-2p}, & p \leq q \\ \quad (= \infty, & p = q) \\ \frac{p\frac{q^2}{p^2}+q}{1-2p\frac{q}{p}} = \frac{q/p}{1-2q}, & p > q \end{cases}$$

Logo,

$$\mathbb{E}_1(H_0) = \frac{1}{1-2p}, \text{ se } p \leq q; \text{ e } \mathbb{E}_1(H_0 | H_0 < \infty) = \frac{1}{|1-2p|}\ \forall\ p.$$

Valor esperado (cont.)

Seja $\mathbb{E}_x(H_0)$, $x \geq 1$, $p \leq 1/2$.

Notemos que dado que $X_0 = x$, temos

$$H_0 = \tilde{H}_{x-1} + \tilde{H}_{x-2} + \cdots + \tilde{H}_1 + \tilde{H}_0, \text{ onde } \tilde{H}_{x-1} = H_{x-1} \text{ e}$$

$$\tilde{H}_z = \inf\{n \geq 0 : X_{\tilde{H}_{x-1}+\cdots+\tilde{H}_{z+1}+n} = z\},\ z < x-1.$$

Homogeneidade espacial: sob $\mathbb{P}_x$, $\tilde{H}_{x-1} \sim H_0$ sob $\mathbb{P}_1$, e logo $\tilde{H}_{x-1} < \infty$ qc.

Da PFM, sob $\mathbb{P}_x$, $\tilde{H}_0, \ldots, \tilde{H}_{x-1}$ são iid $\sim H_0$ sob $\mathbb{P}_1$, e logo são todas finitas quase certamente.

Segue prontamente que

$$\mathbb{E}_x(H_0) = x\,\mathbb{E}_1(H_0) = \frac{x}{1-2p}.$$